

Chương 6: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1 CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

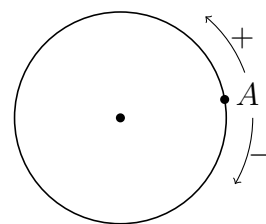
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa.

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm.

Quy ước: chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Định nghĩa. Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A và B . Một điểm M di chuyển trên đường tròn luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ A đến B tạo nên một *cung lượng giác* có điểm đầu là A , điểm cuối là B .

! Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng, ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là $\widehat{AB}$.

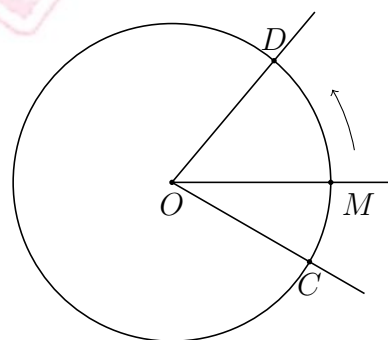
Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì

- Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung hình học (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.
- Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B .

Định nghĩa.

Trên đường tròn định hướng, cho cung lượng giác $\widehat{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác $\widehat{CD}$ nói trên.

Khi đó, tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD . Ta nói tia OM tạo ra một *góc lượng giác* có tia đầu là OC , tia cuối là OD . Kí hiệu: (OC, OD) .

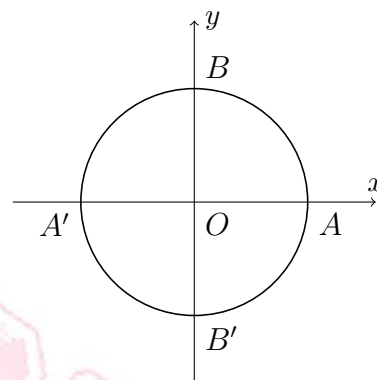


Định nghĩa.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$. Ta lấy A làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên gọi là *đường tròn lượng giác (gốc A)*.

**2 SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC**

Định nghĩa. Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là *cung co số đo 1 rad*.

Liên hệ giữa độ và rad: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

! Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Bảng chuyển đổi thông dụng:

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Định nghĩa. Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung là $\widehat{AM}$ là số $\widehat{AM}$.

Ghi nhớ:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Định nghĩa. Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương. Kí hiệu số đo của cung là $\widehat{AM}$ là số $\widehat{AM}$.

Ghi nhớ

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

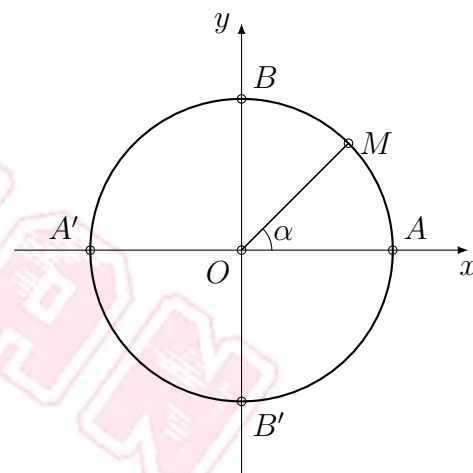
$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$ là điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo α .

**B CÁC DẠNG TOÁN****Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian**

Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 72° ; 600° ; $-37^\circ 45' 30''$.

Lời giải.

Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad nên

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5};$$

$$600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3};$$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587. \quad \square$$

Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{5}$; -4 .

Lời giải.

Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên

$$\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ;$$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 54° ; $30^\circ 45'$; -60° ; -210° .

Lời giải.

$$54^\circ = 54 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{10};$$

$$30^\circ 45' = 30^\circ + \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \left(\frac{123}{4}\right)^\circ = \frac{123}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{41\pi}{240} \approx 0,5367;$$

$$-60^\circ = -60 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{3};$$

$$-210^\circ = -210 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{6}.$$

□

Bài 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $3,56\pi$.

Lời giải.

$$\frac{\pi}{5} = \left(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 36^\circ;$$

$$-\frac{5\pi}{6} = -\left(\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -150^\circ;$$

$$\frac{4\pi}{3} = \left(\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 240^\circ;$$

$$3,56\pi = \left(3,56\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 640^\circ 48'.$$

□

Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) và có độ dài là l thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

Đặc biệt: $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ, 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}.$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

a) $\frac{3\pi}{4}$

b) 51°

c) $\frac{1}{3}$

Lời giải.

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

a) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

b) Ta có $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi \cdot 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04 \text{ m}.$

c) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12 \text{ m}.$

□

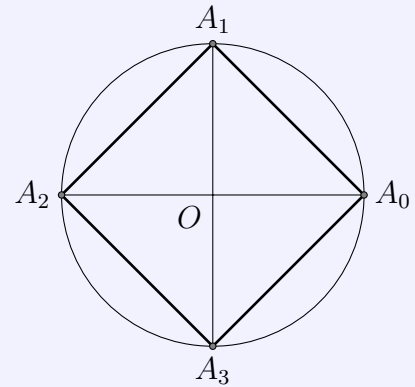
Ví dụ 2. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

Lời giải.

Một hải lí dài $\frac{40000}{360} \cdot \frac{1}{60} \approx 1,852$ km. □

Ví dụ 3.

Cho hình vuông A_0, A_1, A_2, A_3 nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j$).

**Lời giải.**

Ta có $\widehat{A_0OA_0} = 0$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2}$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_2} = \pi$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_2} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_3} = \frac{3\pi}{2}$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Như vậy $\text{sđ}\widehat{A_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, k \in \mathbb{Z}$

Theo hệ thức salơ ta có $\text{sđ}\widehat{A_iA_j} = \text{sđ}\widehat{A_0A_j} - \text{sđ}\widehat{A_0A_i} + k2\pi = (j - i) \cdot \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau:

a) Bán kính $R = 5$, có số đo 72° .

b) Bán kính $R = 18$, có số đo 150° .

Lời giải.

a) $l = \frac{\pi \cdot 72}{180} \cdot 5 = 2\pi$.

b) $l = \frac{\pi \cdot 150}{180} \cdot 18 = 15\pi$. □

Bài 2. Cho đường tròn có đường kính $R = 20$ cm. Hãy tính độ dài cung tròn có số đo: $\frac{\pi}{15}; 1, 5; 37^\circ$

Lời giải.

• $l = \frac{\pi}{15} \cdot 20 \approx 4,19$ cm.

• $l = 1,5 \cdot 20 \approx 30$ cm.

• $l = \frac{37 \cdot \pi}{180} \cdot 20 \approx 12,91$ cm. □

Bài 3. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải.a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng, tức là quay được một góc $\frac{22\pi}{5}$ (rad) hay 792° .b) Trong 1 phút, bánh xe lăn được $l = 340 \cdot \frac{22\pi}{5} \cdot 60 \approx 281,990$ (mm) ≈ 282 m. $\square$ **Bài 4.** Cho lục giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}$, $\widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$).**Lời giải.**

$$\text{sđ } \widehat{A_0A_i} = \frac{i\pi}{3} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sđ } \widehat{A_iA_j} = \text{sđ } \widehat{A_0A_j} - \text{sđ } \widehat{A_0A_i} + k2\pi = (j - i) \cdot \frac{\pi}{3} + k2\pi, i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j, k \in \mathbb{Z}.$$

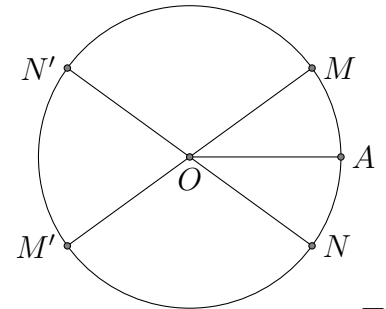
 $\square$ **Bài 5.** Trên đường tròn lượng giác gốc A . Cho điểm M, N sao cho $\text{sđ } \widehat{AM} = \frac{\pi}{5}$, $\text{sđ } \widehat{AN} = -\frac{\pi}{5}$. Các điểm M', N' lần lượt là các điểm đối xứng của M, N qua tâm đường tròn. Tìm số đo của cung $\widehat{AM'}$, $\widehat{AN'}$ và $\widehat{M'N'}$.**Lời giải.**

$$\text{sđ } \widehat{AM'} = \frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{6\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sđ } \widehat{AN'} = -\frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{4\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Theo hệ thức Saclo ta có

$$\text{sđ } \widehat{M'N'} = \text{sđ } \widehat{AN'} - \text{sđ } \widehat{AM'} + k2\pi = -\frac{2\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

 $\square$ **Dạng 3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác**

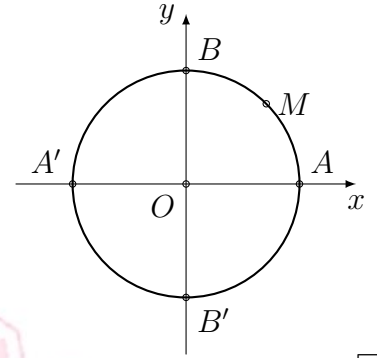
Để biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, ta thường sử dụng các kết quả sau:

- Cung có số đo α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m điểm. Từ đó để biểu diễn các cung lượng giác đó, ta cho k chạy từ 0 đến $m - 1$ rồi biểu diễn các cung đó.

BÀI TẬP DẠNG 3**Ví dụ 1.** Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo $\frac{9\pi}{4}$.**Lời giải.**

Ta có $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng góc $\frac{9\pi}{4}$ trùng với điểm biểu diễn cung lượng góc $\frac{\pi}{4}$.

Vậy điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ $\widehat{AB}$.



□

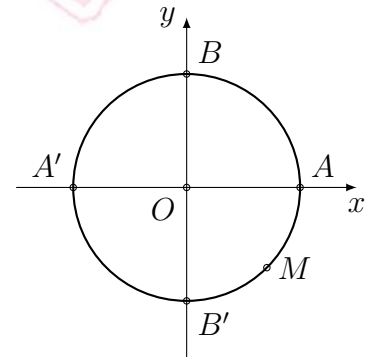
Ví dụ 2. Biểu diễn cung lượng góc trên đường tròn lượng giác có số đo -765° .

Lời giải.

Ta có $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng góc -765° trùng với điểm biểu diễn cung lượng góc -45° . Lại có $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$.

Ta chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn góc có số đo -765° .



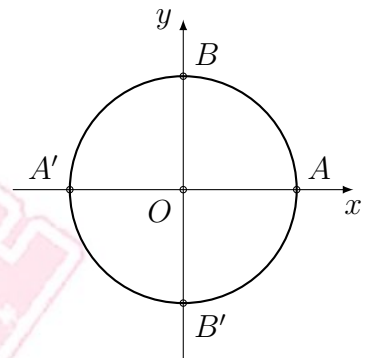
□

Ví dụ 3. Biểu diễn các cung lượng góc có số đo $x = k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng góc có số đo $k\pi$.

- Với $k = 0$, $x = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1$, $x = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .



□

Ví dụ 4. Cho cung lượng góc có số đo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2\pi; 5\pi]$?

Lời giải.

$$\text{Giải hệ bất phương trình } \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi > 2\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}$$

Từ đó, để $x \in [2\pi; 5\pi]$ thì $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$. Vì k là số nguyên nên có 3 giá trị của k , là 2, 3, 4, thỏa mãn

ycbt. □

Ví dụ 5. Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$?

Lời giải.

Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} > -\frac{3\pi}{5} \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} \leq 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{16}{15} \\ k \leq \frac{52}{3} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$ thì $-\frac{16}{15} < k \leq \frac{52}{3}$. Vì k là số nguyên nên có 19 giá trị của k ($-1, 0, \dots, 16, 17$) thỏa ycbt. □

Ví dụ 6. Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ với số k tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$?

Lời giải.

Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} > -\frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{1}{2} \\ k \leq \frac{27}{2} \end{cases}.$$

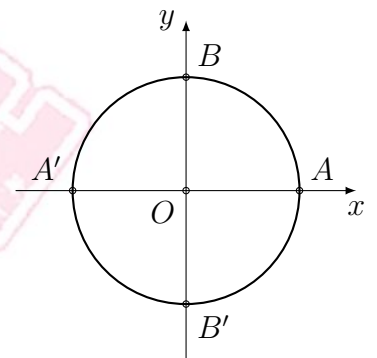
Từ đó, để $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ thì $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{27}{2}$. Vì k là số nguyên nên có 14 giá trị của k ($0, 1, \dots, 12, 13$) thỏa ycbt. □

Ví dụ 7. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{2} = \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $\frac{k\pi}{2}$.

- Với $k = 0$, $x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 2$, $x_3 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .
- Với $k = 3$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .

□

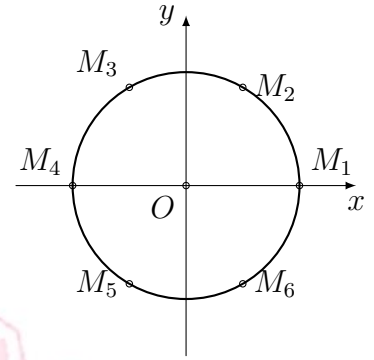
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{3} = \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $\frac{k\pi}{3}$.

- Với $k = 0, x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1, x_2 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2, x_3 = \frac{2\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3, x_4 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 4, x_5 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_5 .
- Với $k = 5, x_6 = \frac{5\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_6 .



□

Bài 2. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -750^\circ$.

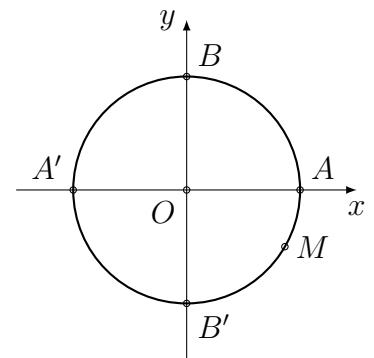
Lời giải.

Ta có $x = -750^\circ = -30 - 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm biểu diễn góc -750° trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -30° .

Lại có $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$. Ta chia đường tròn thành 12 phần bằng nhau.

Chú ý góc -30° nằm dưới trục Ox .

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác -750° .



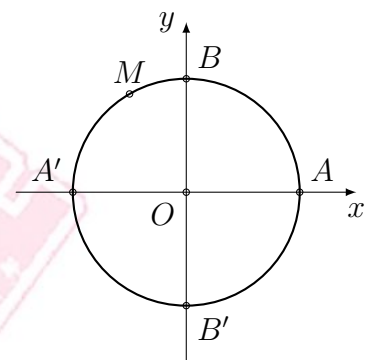
□

Bài 3. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành 3 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác $x = -\frac{2\pi}{3}$.



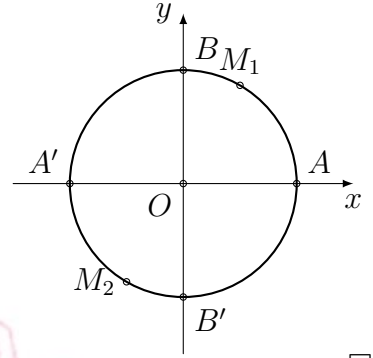
□

Bài 4. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

- Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .



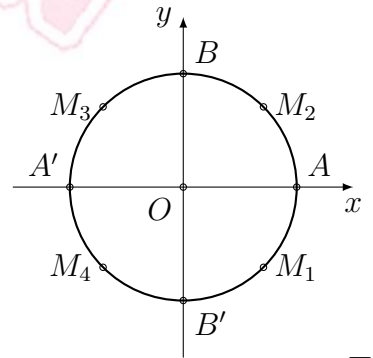
□

Bài 5. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3$, $x_4 = \frac{5\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .



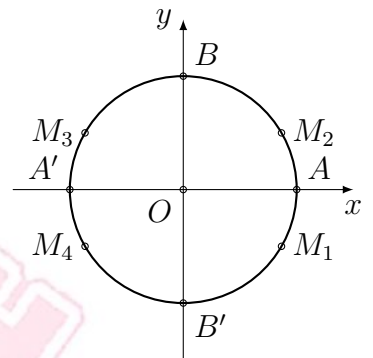
□

Bài 6. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 3$, $x_4 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 4$, $x_5 = \frac{7\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 5$, $x_6 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



□

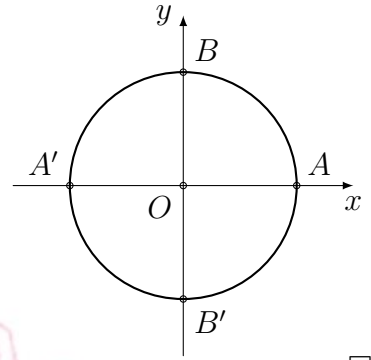
Bài 7. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = k\pi$ và $y = k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1$, $x_2 = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A' .

Ta có $y = k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0$, $y = 0$, được biểu diễn bởi điểm A . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.



□

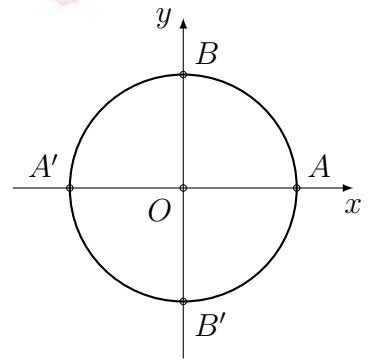
Bài 8. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B' .

Ta có $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.



□

Bài 9. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ và $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_4 .

Ta có $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y .

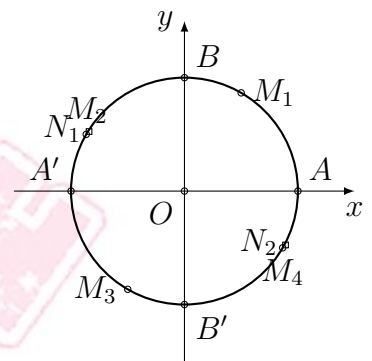
Với $k = 0$, $y_1 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm N_1 .

Với $k = 1$, $y_2 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm N_2 .

Vậy số điểm chung nhận được là 2 điểm chung.

□

Bài 10. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{4}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = k\pi$.



Lời giải.

Ta có $x = \frac{k2\pi}{4} = \frac{k2\pi}{8}$. Vậy có 8 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \frac{8\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8}$.

Ta có $y = k\pi = \frac{2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{2}$.

Vậy có 6 điểm thỏa mãn ycbt. □

Bài 11. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

Ta có $y = \frac{k2\pi}{3}$. Vậy có 3 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Vậy có 4 điểm thỏa mãn ycbt. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 12. Chứng minh:

- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo lần lượt là $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối.
- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo 645° và -435° thì có cùng tia cuối.

Lời giải.

a) Ta có : $\frac{22\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + 4\pi$.

Vậy hai góc đã cho có cùng tia cuối.

b) Ta có : $645^\circ = -75^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ và $-435^\circ = -75^\circ - 360^\circ$.

Vậy 645° và -435° có cùng tia cuối. □

Bài 13. Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou , kim phút đồng hồ là tia Ov . Hãy tìm số đo của góc lượng giác $(Ou; Ov)$ khi đồng hồ chỉ 3 giờ, 4 giờ, 9 giờ, 11 giờ.

Lời giải.

- Khi đồng hồ chỉ 3 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 - Khi đồng hồ 4 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
 - Khi đồng hồ 9 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
 - Khi đồng hồ 11 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$
-

Bài 14. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α . Tìm số đo góc hình học $\widehat{uOv}$ trong các trường hợp sau:

a) $\alpha = -1955^\circ$

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3}$

Lời giải.

Trước hết ta cần nhớ $0^\circ \leq \widehat{uOv} \leq 180^\circ$ và $(Ou, Ov) = \widehat{uOv} + k360^\circ$.

a) Ta có $\alpha = -1955^\circ = 165^\circ - 6 \cdot 360^\circ$. Nên $\widehat{uOv} = 165^\circ$.

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 181 \cdot 2\pi$. Vậy $\widehat{uOv} = \frac{2\pi}{3}$.

□

Bài 15. Cho đường tròn đường kính 20 cm. Tìm số đo bằng độ và rad các cung có độ dài lần lượt là 9 cm, 37 cm.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn, khi đó suy ra $R = 10$ cm.

- Với cung có độ dài 9 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{9}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{9}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{162}{\pi}\right)^\circ$.
- Với cung có độ dài 37 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{37}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{37}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{296}{\pi}\right)^\circ$.

□

Bài 16. Trên đường tròn lượng giác cho các cung có số đo theo thứ tự là $-60^\circ, -315^\circ, -1130^\circ, -\frac{180\pi}{7}, \frac{11\pi}{3}$. Hỏi trong các cung trên những cung nào có cùng điểm cuối?

Lời giải.

Trước hết ta thấy hai cung có số đo α và β gọi là có chung gốc và chung ngọn khi và chỉ khi $\alpha = \beta + k2\pi \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2k\pi$. Tức là hai cung lượng giác có chung điểm gốc và điểm ngọn khi và chỉ khi chúng hơn kém nhau bội của 2π (bội của 360°).

Ta có:

$$\begin{aligned} -60^\circ - (-315^\circ) &= 255^\circ \neq k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ -60^\circ - (-1130^\circ) &= -3 \cdot 360^\circ - 110^\circ \neq k360^\circ \\ -60^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -\frac{\pi}{3} + \frac{180\pi}{7} \neq k2\pi \\ -60^\circ - \left(\frac{11\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{3} = -4\pi = -2 \cdot 2\pi \\ -315^\circ - (-1130^\circ) &= -4 \cdot 360^\circ - 45^\circ \neq k360^\circ \\ -1130^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -3 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{18} + 13, 2\pi - \frac{2\pi}{7} \neq k2\pi. \end{aligned}$$

Như vậy bằng cách tính hiệu số của từng cặp ta thấy chỉ có cung -60° và cung $\frac{11\pi}{3}$ là có chung điểm đầu và điểm cuối.

□

Bài 17. Cho góc lượng giác $(OC; OD) = 405^\circ + k360^\circ$. Tìm tất cả các góc có cùng tia đầu và tia cuối với góc đã cho và có số đo với giá trị tuyệt đối không quá 1200° .

Lời giải.

Gọi α là góc cần tìm.

Theo bài ra $\alpha \leq |1200^\circ| \Leftrightarrow -1200^\circ \leq 405^\circ + k360^\circ \leq 1200^\circ \Rightarrow -\frac{107}{24} \leq k \leq \frac{53}{24} \Rightarrow k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy các góc cần tìm theo thứ tự là : $-1035^\circ; -675^\circ; -315^\circ; 45^\circ; 405^\circ; 765^\circ; 1125^\circ$. $\square$

Bài 18. Xác định điểm cuối của cung lượng giác $\widehat{AM}$ nằm trong góc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ trong các trường hợp sau:

a) $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ$

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi$

Lời giải.

a) Ta có $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ = 175^\circ + 5 \cdot 360^\circ$ và $90^\circ < 175^\circ < 180^\circ$.

Vậy điểm M nằm trong cung phần tư thứ II

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi = \frac{30\pi}{19} + 52 \cdot 2\pi$ và $\frac{3\pi}{2} < \frac{30\pi}{19} < 2\pi$.

Vậy điểm M nằm tại góc phần tư thứ IV. $\square$

Bài 19. Hiện tại đồng hồ chỉ 8 giờ đúng. Nếu đồng hồ chạy bình thường thì sau bao nhiêu lần đầu tiên kim giờ OG và kim phút OP tạo thành góc lượng giác $(OG; OP) = 180^\circ$?

Lời giải.

Một giờ kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$. Như vậy một giờ kim phút OP vạch một góc lớn hơn kim giờ 330° . Hiện tại 8 giờ đúng tức là $(OG; OP) = 120^\circ$.

Gọi t là thời gian (giờ) để hai kim tạo thành một góc 180° lần đầu tiên. khi đó

$$t = \frac{180 - 120}{330} = \frac{2}{11} \text{ giờ.}$$

$\square$

Bài 20. Kim giờ và kim phút của một đồng hồ lớn có độ dài lần lượt là 165 cm và 225 cm. Hỏi trong 40 phút đầu kim giờ vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét, đầu kim phút vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét ?

Lời giải.

Một giờ (60 phút) kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$.

Như vậy trong 40 phút đầu kim phút vạch một góc $\frac{40 \cdot 360}{60} = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ rad, kim giờ vạch nên một góc $\frac{40 \cdot 30}{60} = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ rad.

Từ đó suy ra độ dài cung tròn mà kim phút và kim giờ đã vạch trong 40 phút đầu lần lượt là:

$$l_p = 225 \cdot \frac{4\pi}{3} = 300\pi \simeq 942,48 \text{ cm} = 9,4248 \text{ m} \text{ và } l_g = 165 \cdot \frac{\pi}{9} \simeq 57,6 \text{ cm} = 0,576 \text{ m.}$$

$\square$

Bài 21. Một bánh xe có bán kính $R = 2,4$ m quay một góc bằng 30° . Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

Lời giải.

Coi bánh xe là một đường tròn có bán kính $R = 2,4$ m. Độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe là độ dài của cung tròn có số đo $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Vậy độ dài cần tìm là $l = 2,4 \cdot \frac{\pi}{6} = 0,4\pi$ cm. $\square$